

Title	代數方程式ノ根ノ限界ニ就イテ
Author(s)	春木, 博
Citation	全国紙上数学談話会. 219 p.366-p.374
Issue Date	1941-07
oaire:version	VoR
URL	<a href="https://doi.org/10.18910/74877">https://doi.org/10.18910/74877</a>
rights	
Note	

*Osaka University Knowledge Archive : OUKA*

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

Osaka University

# 947. 代数方程式ノ根ノ限界ニ就イテ

春 水 博 (神戸商船)

以下 係数ニ條件ヲ與ヘストキノ  $n$  次ノ代数方程式ノ根ノ限界ニツイテ考察シヨウ。断リノ  $\alpha$  イカヤリハ、係数ハ複素数トスル。

(定理)  $n$  次ノ代数方程式

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n = 0$$

ニ於テ  $|a_0| > \frac{n-1}{2}$  ナラバ任意ノ根ヲ  $\alpha$  トスルトキ

$$|\alpha| \leq \left[ \frac{|a_1|^n + 2|a_2|^{\frac{n}{2}} + 3|a_3|^{\frac{n}{3}} + \dots + n|a_n|^{\frac{n}{n}}}{n(|a_0| - \frac{n-1}{2})} \right]^{\frac{1}{n}}$$

(証明)  $|x| = \rho$  トオケバ

$$|f(x)| \geq |a_0| \rho^n - (|a_1| \rho^{n-1} + |a_2| \rho^{n-2} + |a_3| \rho^{n-3} + \dots + |a_n|)$$

ニカル  $= a \geq 0, b \geq 0, \alpha > 0, \beta > 0, \alpha + \beta = 1$  ナラバ

$$a^\alpha \cdot b^\beta \leq a\alpha + b\beta \quad \text{ナラバ}$$

$$|a_1| \rho^{n-1} = (|a_1|^n)^{\frac{1}{n}} (\rho^n)^{1-\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} |a_1|^n + (1-\frac{1}{n}) \rho^n$$

$$|a_2| \rho^{n-2} = (|a_2|^{\frac{n}{2}})^{\frac{2}{n}} (\rho^n)^{1-\frac{2}{n}} \leq \frac{2}{n} |a_2|^{\frac{n}{2}} + (1-\frac{2}{n}) \rho^n$$

$$|a_3| \rho^{n-3} = (|a_3|^{\frac{n}{3}})^{\frac{3}{n}} (\rho^n)^{1-\frac{3}{n}} \leq \frac{3}{n} |a_3|^{\frac{n}{3}} + (1-\frac{3}{n}) \rho^n$$

-----

$$|a_n| \leq \frac{n}{n} |a_n|^{\frac{n}{n}} + (1-\frac{n}{n}) \rho^n$$

ナラバ

$$|f(x)| \geq |a_0| \rho^n - \frac{|a_1|^n + 2|a_2|^{\frac{n}{2}} + 3|a_3|^{\frac{n}{3}} + \dots + n|a_n|^{\frac{n}{n}}}{n} \\ - \frac{n-1}{2} \rho^n$$

故に  $|a_0| > \frac{n-1}{2} + 1$  故

$$\rho^n > \frac{|a_1|^n + 2|a_2|^{\frac{n}{2}} + 3|a_3|^{\frac{n}{3}} + \dots + n|a_n|^{\frac{n}{n}}}{n(|a_0| - \frac{n-1}{2})}$$

ならば

$$|f(x)| > 0$$

故に、任意の根  $\alpha$  に対して

$$|\alpha| \leq \left[ \frac{|a_1|^n + 2|a_2|^{\frac{n}{2}} + 3|a_3|^{\frac{n}{3}} + \dots + n|a_n|^{\frac{n}{n}}}{n(|a_0| - \frac{n-1}{2})} \right]^{\frac{1}{n}}$$

(定理)  $n$  次代数方程式

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n = 0$$

に於て  $|a_0| \geq \frac{n + \sum_{i=1}^n |a_i|^2}{2}$  ならば任意の根  $\alpha$  に対して

なり

$$|\alpha| \leq 1 \text{ 或は } |\alpha| > \left[ \frac{|a_0| + \sqrt{|a_0|^2 - n \sum_{i=1}^n |a_i|^2}}{n} \right]^{\frac{1}{n}} (\geq 1)$$

である。

(証明)  $|x| = \rho$  とする。

$$|f(x)| \geq |a_0| \rho^n - (|a_1| \rho^{n-1} + |a_2| \rho^{n-2} + |a_3| \rho^{n-3} + \dots + |a_n|)$$

然るに  $x \geq 0, y \geq 0$  に対して  $xy \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$  故

$$|a_1| \rho^{n-1} \leq \frac{1}{2} (|a_1|^2 + \rho^{2n-2})$$

等ヲ得ル。

$$\text{故} = |f(x)| \geq |a_0| \rho^n - \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i=1}^n |a_i|^2 + \rho^{2n-2} + \rho^{2n-4} + \dots + 1 \right\}$$

今  $\rho > 1$  トスレバ  $\rho^{2n} > \rho^{2n-2} > \rho^{2n-4} > \dots > 1$  ナル故

$$|f(x)| > |a_0| \rho^n - \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^n |a_i|^2 + n \rho^{2n} \right)$$

$$\text{故} = |a_0| \rho^n - \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^n |a_i|^2 + n \rho^{2n} \right) \geq 0 \quad \text{ナルトキ}$$

$$\text{即チ} \quad \frac{|a_0| - \sqrt{|a_0|^2 - n \sum |a_i|^2}}{n} \leq \rho^n \leq \frac{|a_0| + \sqrt{|a_0|^2 - n \sum |a_i|^2}}{n}$$

ナルトキ (根号ノ中ハ負トハナラナイ、 假定ニヨリ

$$|a_0| \geq \frac{n + \sum |a_i|^2}{2} \quad \text{デシカモ} \quad \frac{n + \sum |a_i|^2}{2} \geq \sqrt{n \sum |a_i|^2} \quad \text{ナ$$

ル故ナラズル)。  $|f(x)| > 0$  トナル。

$$\text{然ル} = |a_0| \geq \frac{n + \sum |a_i|^2}{2} \quad \text{ナル條件ニヨリ}$$

$$\frac{|a_0| - \sqrt{|a_0|^2 - n \sum |a_i|^2}}{n} \leq 1$$

ナル故。  $\rho > 1$  ナルトキハ

$$\rho^n \leq \frac{|a_0| + \sqrt{|a_0|^2 - n \sum |a_i|^2}}{n}$$

ナラバ  $|f(x)| > 0$  トナル。

故ニ、任意ノ根ヲ取ツルトキ

$$|\alpha| \leq 1 \quad \text{或} \quad |\alpha| > \left( \frac{|a_0| + \sqrt{|a_0|^2 - n \sum_{i=1}^n |a_i|^2}}{n} \right)^{\frac{1}{n}} (\geq 1)$$

ヲ得ル。

(定理)  $n$  次 1 代数方程式

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n = 0$$

1 根  $\alpha$  トシタトキ =  $(n \geq k \geq 1)$

$$(i) \quad |\alpha| \leq 1 \quad \text{ナルトキハ} \quad \frac{n + \sum_{i=0}^n |a_i|^2 - |a_{n-k}|^2}{2|a_{n-k}|} < 1 \quad \text{ナルトキ}$$

$$\text{即チ} \quad |a_{n-k}| > -1 + \sqrt{n+1 + \sum_{i=0}^n |a_i|^2} \quad \text{ナラバ}$$

$$|\alpha| \leq \left[ \frac{n + \sum_{i=0}^n |a_i|^2 - |a_{n-k}|^2}{2|a_{n-k}|} \right]^{\frac{1}{k}} (< 1)$$

$$(ii) \quad |\alpha| \geq 1 \quad \text{ナルトキハ} \quad \frac{2|a_k|}{n + \sum_{i=0}^n |a_i|^2 - |a_k|^2} > 1 \quad \text{ナルトキ}$$

$$\text{即チ} \quad |a_k| > -1 + \sqrt{n+1 + \sum_{i=0}^n |a_i|^2} \quad \text{ナラバ}$$

$$|\alpha| \geq \left[ \frac{2|a_k|}{n + \sum_{i=0}^n |a_i|^2 - |a_k|^2} \right]^{\frac{1}{n-k}} (> 1)$$

(証明)  $|x| = \rho$  トスルトキ

$$\begin{aligned} |f(x)| &\geq |a_{n-k}| \rho^k - (|a_0| \rho^n + \dots + |a_{n-k-1}| \rho^{k+1} \\ &\quad + |a_{n-k+1}| \rho^{k-1} + \dots + |a_n|) \\ &\geq |a_{n-k}| \rho^k - \frac{1}{2} \left( \sum_{i=0}^n |a_i|^2 - |a_{n-k}|^2 \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} (\rho^{2n} + \dots + \rho^{2(k+1)} + \rho^{2(k-1)} + \dots + 1) \end{aligned}$$

$\rho \leq 1$  ならば

$$|f(x)| \geq |a_{n-k}| \rho^k - \frac{1}{2} \left( n + \sum_{i=0}^n |a_i|^2 - |a_{n-k}|^2 \right)$$

故 =  $\rho^k > \frac{n + \sum_{i=0}^n |a_i|^2 - |a_{n-k}|^2}{2 |a_{n-k}|}$  ならば  $|f(x)| > 0$  となる。

故 = 根  $\alpha$  があるとき,  $|\alpha| \leq 1$  ならば

$$|\alpha| \leq \left[ \frac{n + \sum_{i=0}^n |a_i|^2 - |a_{n-k}|^2}{2 |a_{n-k}|} \right] \frac{1}{k}$$

$$\frac{n + \sum_{i=0}^n |a_i|^2 - |a_{n-k}|^2}{2 |a_{n-k}|} < 1 \text{ ならば 即ち } |a_{n-k}| > \frac{1}{2} \sqrt{n + 1 + \sum_{i=0}^n |a_i|^2}$$

となるとき  $|\alpha| \leq \left[ \frac{n + \sum_{i=0}^n |a_i|^2 - |a_{n-k}|^2}{2 |a_{n-k}|} \right] \frac{1}{k} < 1$  となる。

(1) の結論を得る。  $|\alpha| \geq 1$  となるとき  $f(x) = 0$  となる方程式  
の根の逆数  $\alpha$  がある方程式  $f(\frac{1}{\alpha}) = 0$  = 對して同様 = 論  
すればよい。

林鶴一先生、東北数学會雜誌 2 卷 = テ

$$(1) \quad f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n = 0;$$

$$a_0 > 0, \quad a_i < 0 \quad (i = 1, \dots, n)$$

この代數方程式、虚根、絶対値、

$$\text{Max} \left( \left| \frac{a_n}{a_{n-1}} \right|, \left| \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \right|, \dots, \left| \frac{a_2}{a_1} \right| \right)$$

より小となることを証明せよ。

(1) ハタゴ ー ツノ 正根  $\alpha$  があるとき,  $\alpha$  の逆数 = 對して

$$\alpha \geq \left( \frac{1}{a_0} \sum_{i=1}^n \sqrt{a_i a_{n+1-i}} \right)^{\frac{2}{n+1}}$$

が成立スル、

$$\text{何者、 } a_0 \alpha^n = -a_1 \alpha^{n-1} - a_2 \alpha^{n-2} - \dots - a_n$$

右辺ヲ逆ノ順序ニテラベレバ

$$a_0 \alpha^n = -a_n - a_{n-1} \alpha - \dots - a_1 \alpha^{n-1}$$

辺々相加ヘレバ

$$2a_0 \alpha^n = (-a_1 \alpha^{n-1} - a_n) + (-a_2 \alpha^{n-2} - a_{n-1} \alpha) + \dots \\ \dots (-a_n - a_1 \alpha^{n-1})$$

$-a_i > 0$  ( $i=1, \dots, n$ ) = 注意シテ  $x \geq 0, y \geq 0$  +

ルトキハ  $x+y \geq 2\sqrt{xy}$  ナル不等式ヲ用ケレバ結局

$$\alpha \geq \left( \frac{1}{a_0} \sum_{i=1}^n \sqrt{a_i a_{n+1-i}} \right)^{\frac{2}{n+1}}$$

$$\text{次ニ (2) } f(x) = a_0 x^{2n+1} - a_1 x^{2n} + a_2 x^{2n-1} - \dots - a_{2n+1} = 0$$

$$a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_{2n+1} > 0$$

ナル方程式ノ任意ノ根ヲ  $\alpha$  トスレバ  $|\alpha| \leq 1$  ナルコトヲ証明  
シヨウ。

(2)  $\ni 1)$

$$(\alpha+1)f(\alpha) = a_0 \alpha^{2n+2} + (a_0 - a_1) \alpha^{2n+1} + (a_2 - a_1) \alpha^{2n} \\ + \dots + (a_{2n} - a_{2n+1}) \alpha - a_{2n+1} \\ = 0$$

$$\therefore a_0 \alpha = -(a_0 - a_1) - \frac{a_2 - a_1}{\alpha} - \dots - \frac{a_{2n} - a_{2n+1}}{\alpha^{2n}} + \frac{a_{2n+1}}{\alpha^{2n+1}}$$

$|\alpha| > 1$  ナルト假定スレバ

$$|a_1||\alpha| \leq |a_0 - a_1| + |a_2 - a_1| + \dots + |a_{2n} - a_{2n+1}| + |a_{2n+1}|$$

$$a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n > 0$$

＋ル假定カラ

$$|\alpha| \leq 1$$

之ハ  $|\alpha| > 1$  ト矛盾スル。

故ニ  $|\alpha| \leq 1$  デアル。

同様ニシテ

$$f(x) = a_0 x^{2n} - a_1 x^{2n-1} + a_2 x^{2n-2} - \dots + a_{2n} = 0$$

$$a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_{2n} > 0$$

＋ル方程式ノ任意ノ根ヲ  $\alpha$  トシタトキ  $|\alpha| \leq 1$  ガ成リ立ツ。

以上ノ事ヲアハセレバ

$$f(x) = a_0 x^n - a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} - \dots + (-1)^n a_n = 0$$

$$a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n > 0$$

ノ任意ノ根  $\alpha$  ニ對シテ  $|\alpha| \leq 1$  ナルコトカ云ヘタ。

高橋進一氏ハ

$$(3) \quad f(x) = (a_0 + i b_0)x^n + (a_1 + i b_1)x^{n-1} + (a_2 + i b_2)x^{n-2} + \dots + (a_n + i b_n) = 0$$

$$a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n > 0,$$

$$b_0 \geq b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n > 0$$

＋ル  $n$  次ノ代数方程式ノ任意ノ根  $\alpha$  ニ對シ、常ニ  $|\alpha| \leq \sqrt{2}$  ナルコトヲ証明サレタ。

高橋氏ハ如何ニシテ証明サレタカハ知ラヌガ、多分同一ト思ハレルケレドモ、次ニ掲ゲルコトニスル。



$$(3) \exists 1) (\alpha-1)f(\alpha) = (a_0+ib_0)\alpha^{n+1} + \{(a_1-a_0)+i(b_1-b_0)\}\alpha^n \\ + \{(a_2-a_1)+i(b_2-b_1)\}\alpha^{n-1} + \dots + \{(a_n-a_{n-1})+i(b_n-b_{n-1})\}\alpha \\ - (a_n+ib_n) = 0$$

$$\therefore |a_0+ib_0||\alpha| \leq |(a_1-a_0)+i(b_1-b_0)| \\ + \frac{|(a_2-a_1)+i(b_2-b_1)|}{|\alpha|} + \frac{|(a_3-a_2)+i(b_3-b_2)|}{|\alpha|^2} \\ + \dots + \frac{|(a_n-a_{n-1})+i(b_n-b_{n-1})|}{|\alpha|^{n-1}} + \frac{|a_n+ib_n|}{|\alpha|^n}$$

$|\alpha| < 1 + n$   $\alpha =$  對シテハ  $|\alpha| \leq \sqrt{2} + n$  故  $|\alpha| \geq 1 + n$   $\alpha$   $\exists$   
 7 考ヘレバ  $\exists 1$ .

$$\therefore |a_0+ib_0||\alpha| \leq |a_1-a_0| + |a_2-a_1| + |a_3-a_2| + \dots + |a_n-a_{n-1}| \\ + |a_n| \\ + |b_1-b_0| + |b_2-b_1| + |b_3-b_2| + \dots + |b_n-b_{n-1}| + |b_n|$$

$$a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n > 0, \quad b_0 \geq b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n > 0 \\ + n \text{ 故}$$

$$|\alpha| \leq \frac{a_0+b_0}{|a_0+ib_0|} \leq \sqrt{2}$$

コノ結果ヲ使ヘバ

$$(4) f(x) = (a_0+ib_0)x^n + (a_1+ib_1)x^{n-1} + (a_2+ib_2)x^{n-2} \\ + \dots + a_n+ib_n = 0$$

$$a_i > 0, \quad b_i > 0 \quad (i=0, 1, 2, 3, \dots, n)$$

$+ n$  次ノ代數方程式ノ任意ノ根ヲ  $\alpha$  トスレバ

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \min\left(\frac{a_0}{a_1}, \frac{a_1}{a_2}, \frac{a_2}{a_3}, \dots, \frac{a_{n-1}}{a_n}, \frac{b_0}{b_1}, \frac{b_1}{b_2}, \frac{b_2}{b_3}, \dots, \frac{b_{n-1}}{b_n}\right)$$

$$\leq |\alpha| \leq \sqrt{2} \operatorname{Max} \left( \frac{a_0}{a_1}, \frac{a_1}{a_2}, \frac{a_2}{a_3}, \dots, \frac{a_{n-1}}{a_n}; \frac{b_0}{b_1}, \frac{b_1}{b_2}, \frac{b_2}{b_3}, \dots, \frac{b_{n-1}}{b_n} \right)$$

ナルコトが証明サレル。

$$g(x) = f(px) \text{ トオケ。}$$

$$p = \operatorname{Max} \left( \frac{a_0}{a_1}, \dots, \frac{a_{n-1}}{a_n}; \frac{b_0}{b_1}, \dots, \frac{b_{n-1}}{b_n} \right)$$

トスレバ

$$a_0 p^n \geq a_1 p^{n-1} \geq a_2 p^{n-2} \geq \dots \geq a_n > 0,$$

$$b_0 p^n \geq b_1 p^{n-1} \geq b_2 p^{n-2} \geq \dots \geq b_n > 0$$

$g(x) = 0$  ハ (3) ナル方程式ト同シ條件ヲモツカラ  $g(x) = 0$

ノ任意ノ根  $\beta =$  對シ

$$|\beta| \leq \sqrt{2}$$

即チ  $f(x) = 0$  ノ根  $\alpha =$  對シ

$$|\alpha| = |p\beta| \leq \sqrt{2} p$$

$$\therefore |\alpha| \leq \operatorname{Max} \left( \frac{a_0}{a_1}, \dots, \frac{a_{n-1}}{a_n}; \frac{b_0}{b_1}, \dots, \frac{b_{n-1}}{b_n} \right)$$

$$|\alpha| \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \min \left( \frac{a_0}{a_1}, \dots, \frac{a_{n-1}}{a_n}; \frac{b_0}{b_1}, \dots, \frac{b_{n-1}}{b_n} \right)$$

ヲ出スニハ  $f\left(\frac{1}{x}\right) = 0$  對シ, 上ノ議論ヲタリカヘセバヨイ。

(注意) 實ハ (3) ナル方程式ノ根ノ絶対値ノ上限  $p$  ヲ  $\sqrt{2}$  トオキ

カヘラレル。(  $1 < p < \sqrt{2}$  )

—— (完) ——